

DISPLACEMENT CURRENT AND AMPERE'S LAW

ТОКЪТ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ И ЗАКОНЪТ ЗА ПЪЛНИЯ ТОК

Ivan Stefanov Bozev*, Radoslav Borislavov Borisov**

* ibozev@abv.bg

**Department of Microelectronics, Technical University of Sofia, Kl. Ohridski, Blvd., 1756 Sofia,
E-mail: radoslav.borisov@gmail.com

Иван Стефанов Бозев*, Радослав Бориславов Борисов**

* ibozev@abv.bg

** Технически Университет – София, Катедра „Микроелектроника“, 1756, София, Бул. „Св. Климента Охридски“ №8, България, E-mail: radoslav.borisov@gmail.com

Abstract - The existing literature about displacement current, although it is clearly defined, there are not enough publications clarifying its nature. Usually it is assumed that the electrical current is three types: conduction current, convection current and displacement current. In the first two cases we have directed movement of electrical charges, while the third case we have time varying electric field. Most often displacement current talking in capacitors. Taking account that charge carriers (electrons and charged particles occupy the negligible space in the surrounding them space, they can be regarded only as exciters of the displacement current that current fills all space and is superposition of the currents of the individual moving charges. For this purpose in the article analyzes the current configuration of lines in space around a moving charge. An analysis of the relationship between the excited magnetic field around the charge and the displacement current. It is shown excited magnetic flux density and excited the displacement current are linked by Ampere's law.

Резюме – В съществуващата литература за токът на електрическата индукция, въпреки че е ясно дефиниран, няма достатъчно публикации, изясняващи неговата същност. Обикновено се приема, че електрическият ток е три вида: ток на проводимостта, ток на конвекцията и ток на електрическата индукция. При първите два случая имаме насочено движение на електрически заряди, докато при третия случай имаме изменящо се във времето електрическо поле. Най-често за тока на електрическата индукция става дума при кондензаторите. Като се вземе предвид, че носителите на зарядите (електрони и заредени частици заемат нищожно място в заобикалящото ги пространство, те могат да се разглеждат само като възбудители на тока на електрическата индукция, който ток изпълва цялото пространство и е суперпозиция от токовете на отделните движещи се заряди. За целта в статията е анализирана конфигурацията на токовите линии в пространството около движещ се заряд. Направен е анализ на връзката между възбуденото магнитно поле около заряда и тока на електрическата индукция. Показано е, възбудената магнитна индукция и възбуденият ток на електрическата индукция са свързани посредством закона за пълния ток.

Keywords: electromagnetic field, magnetic flux density, displacement current.

1. УВОД

С намаляването на размерите на електронните компоненти все по ясно се откроява дискретната структура на материята и е необходимо да се отчитат и процесите, свързани с енергията на електромагнитното поле, заобикалящо отделните заряди. До сега най-известните анализи на електромагнитното поле около движещ се заряд са на Liénard–Wiechert (Liénard–Wiechert potentials), Oliver Heaviside, Oleg Jefimenko (Jefimenko's equations). За всичките тези анализи се твърди, че са решения на уравненията на Максвел. В крайна сметка са широко разпространени две конфигурации на електрическото поле около движещ се заряд, показани съответно на фигура 1 и фигура 2. На фигура 1 са показани закъсняващите потенциали на електрическото поле в съответствие с Liénard–Wiechert и тази картина е несиметрична по отношение на движещия се заряд. В случая картината се отнася за скорост на заряда $v = 0,5c_0$, където c_0 е скоростта на светлината. Изразен е ефекта на Доплер. На фигура 2 е показана напрегнатостта на електрическото поле в съответствие с анализа Heaviside и както се вижда, картината е симетрична по отношение на заряда. Свиването по оста x се обяснява с Лоренцовото свиване по направление на движението.

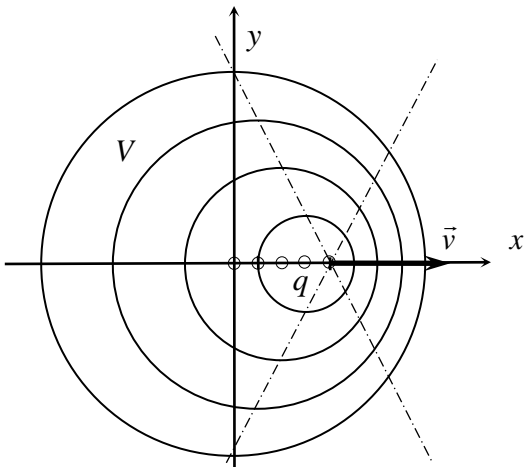


FIGURE 1

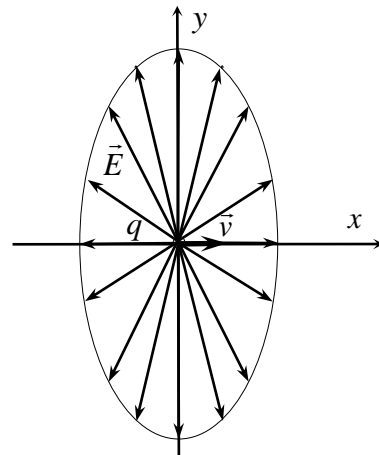


FIGURE 2

По-късно Ефименко въвежда понятието закъсняващо време.

При всички анализи на електромагнитното поле около движещ се заряд липсва причинно-следствена връзка между отделните величини и процеси.

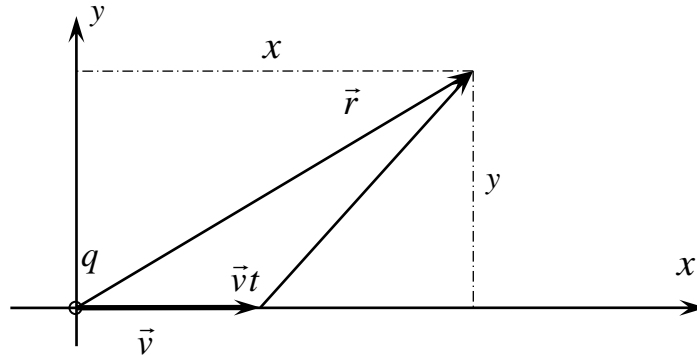
2. ИЗЛОЖЕНИЕ

От уравненията на Максвел е известно [1], че плътността на тока на електрическата индукция \vec{j}_D се дава с израза

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

където ϵ_0 е електрическата константа, \vec{E} е напрегнатостта на електрическото поле и \vec{D} е електрическата индукция.

На фиг.3 е показан движещ се заряд q със скорост \vec{v} по оста x . Напрегнатостта на електрическото поле \vec{E} и електрическата индукция \vec{D} са определени в съответствие със закона на Кулон за точков заряд, което съответства на граничен случай при $\vec{v} \rightarrow 0$.



Фигура 3

Както се вижда от изразите по-долу, те имат сферична симетрия.

$$\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

където $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ при тримерна координатна система и \hat{r} е единичен вектор на r . На фигура 3 изображението е двумерно ($r^2 = x^2 + y^2; z = 0$) и се има предвид осевата симетрия.

При движението на заряда, напрегнатостта на електричното поле в отделните точки на пространството е функция на времето t . Полученият израз за напрегнатостта на електричното поле \vec{E} е

$$\vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \left((x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}}, \quad \vec{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \left((x-vt)^2 + y^2 \right)^{3/2}}, \quad (3)$$

Съответно трите съставки на производните на напрегнатостта на електричното поле по съответните оси са:

$$\vec{E}_x = E \cdot \frac{(x-vt)}{\left((x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} = \frac{q(x-vt)}{4\pi\epsilon_0 \left((x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}}, \quad (4)$$

$$\vec{E}_y = E \cdot \frac{y}{\left((x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \left((x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}}, \quad (5)$$

$$\vec{E}_z = E \cdot \frac{z}{\left((x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 \left((x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}}. \quad (6)$$

За първите производни по отношение на времето за съответните съставки се получава

$$\vec{E}'_x = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(2(x-vt)^2 - y^2 - z^2)}{\left((x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad \vec{E}'_{x \rightarrow 0} = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(2x^2 - y^2 - z^2)}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad (7)$$

$$\vec{E}'_y = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3y(x-vt)}{\left((x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad \vec{E}'_{y \rightarrow 0} = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3yx}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad (8)$$

$$\vec{E}'_z = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3z(x-vt)}{\left((x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad \vec{E}'_{z \rightarrow 0} = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3zx}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad (9)$$

Съответно за плътността тока на електрическата индукция \vec{j}_D се получава

$$\vec{j}_x = \epsilon_0 \vec{E}'_x = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{(2x^2 - y^2 - z^2)}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad (10)$$

$$\vec{j}_y = \epsilon_0 \vec{E}'_y = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{3yx}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad (11)$$

$$\vec{j}_z = \epsilon_0 \vec{E}'_z = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{3zx}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \quad (12)$$

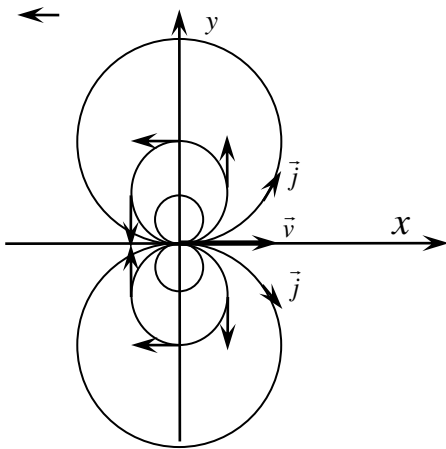
Ако изберем положението на точката, която анализираме да лежи в равнината xu , тогава $z = 0$ и можем да изобразим по ясно траекторията на тока на електрическата индукция.

На фигура 4 са показани траекториите на тока на електрическата индукция в равнината xu , като са използвани онлайн калкулаторите [2], [3]. Голямото удобство на посочените калкулатори е, че дават преобразуванията стъпка по стъпка и показват графики на функциите.

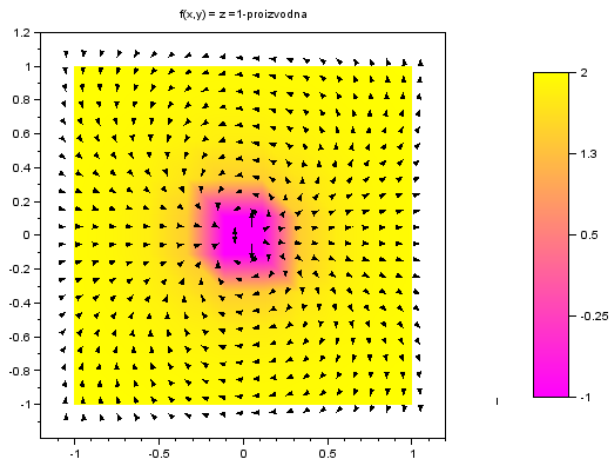
Направена е симулация на картината на тока на електрическата индукция с помощта на програмата [4], като изобразената картина на Фигура 5 съответства на изразите (10) и (11). В случая $z = 0$.

Както се вижда от Фигура 4 и Фигура 5, токовете линии на тока на електрическата индукция са окръжности с центрове, лежащи върху оста y и преминаващи през началото на координатната система (в случая през движещия се точков заряд). При равномерно движение на заряда q и скорост клоняща към нула ($\vec{v} \rightarrow 0$) векторното поле на плътността на тока на

електрическата индукция е соленоидално. То има дивергенция равна на нула и тока на електрическата индукция формира токови тръби с не променящ се ток.



Фигура 4

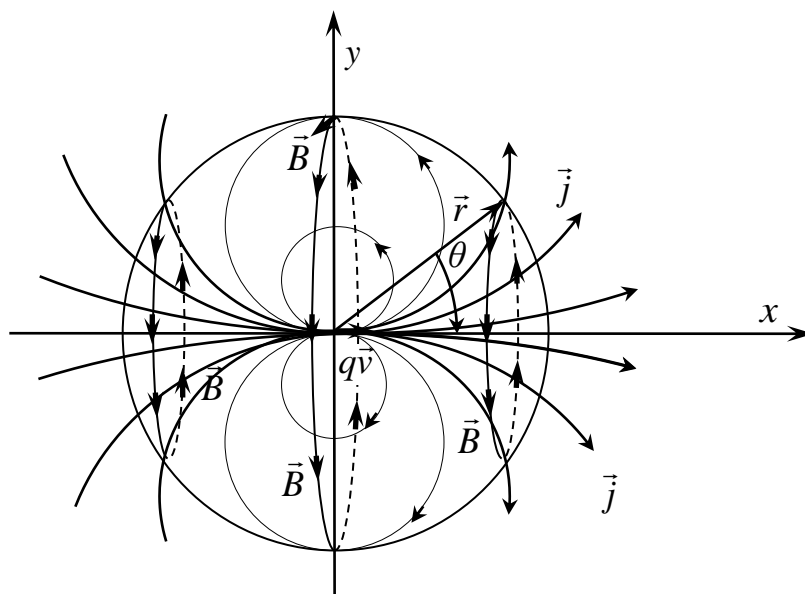


Фигура 5

На фигура 6 е показана формата на тока на електрическата индукция и възбудената магнитна индукция \vec{B} около движещия се заряд. Стойността на магнитната индукция в съответствие с фигура 6 се определя от по закона на Био-Савар съгласно израза

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|\vec{v}| \sin \theta}{r^2}. \quad (13)$$

Принципен интерес представлява да се определи дали в пространството около движещ се заряд създадените от него магнитното поле и ток на електрическата индукция са свързани помежду си със закона за пълния ток.



Фигура 6

За целта са направени изчисления за обхванатия ток от контури с форма на окръжност с център по оста x и е проверено дали магнитната индукцията по окръжността, определена в съответствие със закона на Био-Савар удовлетворява закона за пълния ток. В таблица 1 са нанесени получените резултати от изчисленията. Прието е $q = 1 \text{ C}$, $r = 1 \text{ m}$ и $v = 1 \text{ m/s}$.

В първата колона е нанесен ъгълът θ .

Изчисленията за магнитната индукция \vec{B} са направени с калкулатора [5], като е използвана формула (13) и посочените по-горе стойности ($B = 10^{-7} \sin\theta$). Резултатите са нанесени във втората колона.

Във третата колона е пълният ток, съответстващ на определената магнитна индукция по окръжността от сферата, определена от ъгъла θ .

$$i = 2\pi r H = 2\pi r \frac{B}{\mu_0} = 2\pi r \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 |\vec{v}| \sin\theta}{4\pi r^2} = \frac{1}{2r} \sin\theta \quad (14)$$

Във четвъртата колона е нанесен токът, преминаващ през кръга, обхванат от окръжността, определена от ъгъла θ .

При $z = 0$ изразът (10) добива вида

$$\vec{j}_x = \epsilon_0 \vec{E}'_x = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (15)$$

Като се вземе предвид, че $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, за тока преминаващ през кръга е валиден изразът.

$$i_p = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{qv (2x^2 - y^2)}{4\pi (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} 2\pi y dy = \int_0^{\sin\theta} \frac{y(2 \cdot (\cos\theta)^2 - y^2)}{2((\cos\theta)^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} dy \quad (16)$$

Изразът при $\theta = 30^\circ$ е $\{ y((2)(\cos(\pi/6))^2 - y^2) / (2((\cos(\pi/6))^2 + y^2)^{(5/2)}) \}$ и е използван онлайн калкулаторът [2].

При $\theta = 90^\circ$ кръгът обхваща началото на координатната система, където величините са безкрайно големи и интегралът е разходящ. Приблизителен резултат може да се получи като се избере равнина, много близка до началото на координатната система и се интегрира от нула до единица. Ако при $x = 0$ се интегрира в граници $y = 1 \dots \infty$, се получава точен резултатът с отрицателен знак. Това е възможно, защото векторното поле на тока е соленоидално (без дивергенция) и токовете през двете части на равнината, разделена от окръжност с център началото на координатната система са равни по модул и с противоположни знаци.

Резултатите от изчисленията са равни на тези от предишната колона.

В четвъртата колона е нанесен токът, определен по сферичната повърхност, заградена от окръжността, съответстваща на ъгъл θ , като са използвани $\vec{j}_{x(z=0)}$ и $\vec{j}_{y(z=0)}$. Токът се изразява със следната зависимост.

$$i_{cd} = \int_{\cos\theta}^1 (\vec{j}_x \cdot \vec{S}_{x\perp} + \vec{j}_y \cdot \vec{S}_{y\perp}) 2\pi y dx = \int_0^R \frac{qv}{4\pi} \frac{(2x^2 - y^2) \frac{x}{y} + 3yx}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} 2\pi y dx = \int_{\cos\theta}^1 \frac{x}{r^3} dx \quad (17)$$

Изразът при $\theta = 30^\circ$ е $\{ x/(1^{\wedge}3) \}$ с граници $(\cos 30^\circ \dots 1)$ и отново е използван онлайн калкулаторът [2]. Разбира се резултатите се повтарят.

В петата колона е определен токът като е използван калкулатор [6] за сферични координати. Понеже няма такъв за повърхностен интеграл, е изчисляван обемен интеграл в тънък слой по повърхността на сферата. Използван е изразът за съставката на плътността на тока на електрическата индукция \vec{j}_ρ , перпендикулярна на повърхността сферата

$$\vec{j}_\rho = \frac{qv \cos\theta}{2\pi \rho^3}. \quad (18)$$

Токът, през повърхността сферата ограничена от ъгъла θ , се дава от интеграла в сферични координати, където $[J]$ е якобиан за сферичните координати ($[J] = \rho^2 \sin\theta$) и ρ е радиуса на сферата. Интегралът е обемен, защото само такъв онлайн калкулатор за сферични координати имаше достъпен. За да се получи повърхностен интеграл е взет съвсем тънък слой по повърхността на сферата.

$$i_{S_{\rho\perp}} = \iiint_{V(s)} [J] j_\rho d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\rho^2 \sin\theta) \frac{\cos\theta}{2\pi \rho^3} d\rho d\theta d\varphi \quad (19)$$

Изразът за калкулатора [6] е $\{ (10^{\wedge}10)(\sin\theta) \cdot \cos\theta / (2 \cdot \pi \cdot \rho) \}$ с граници за интегриране $\rho_1=1; \rho_2=1.0000000001$.

Таблица 1

1	2	3	4	5	6
θ	B	i	i_ρ	i_{cd}	i_c
deg	T ($\times 10^{-7}$)	A	A	A	A
30	0.5	0.125	0.125	0.125	0.125
45	0.707106	0.25	0.25	0.25	0.25
60	0.866025	0.375	0.375	0.375	0.375
90	1	0.5	0.5	0.5	0.5

От резултатите в таблица 1 може да се направят следните заключения:

Възбудените магнитна индукция и ток на електрическата индукция около движещ се заряд удовлетворяват закона за пълния ток.

Векторното поле на тока на електрическата индукция при постоянна скорост на движение на заряда е вихрово поле.

Като се вземе предвид, че свързаните електрически заряди съществуват единствено в дискретна форма и са съсредоточени в много малки обеми в пространството, то те могат да се разглеждат само като възбудители на тока на електрическата индукция, а магнитното поле да се възбужда от тока на електрическата индукция.

Разбира се практически е много по удобно да се работи с тока на проводимостта и тока на конвекцията, които физически са по ясни и се изразяват математически много по-лесно, а резултатите са едни и същи.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящия доклад са представени теоретични изследвания и изчисления, показващи връзката между магнитната индукция в пространството около движещ се заряд и тока на електричната индукция посредством закона за пълния ток. Получени са нови зависимости които допринасят за доразвиване на математичния модел за описание на електромагнитното поле, предложен в поредица от статии, цитирани в [7].

Интерес в бъдеще представлява изследване на зависимостта на магнитната индукция в дадена точка около движещ се заряд като функция на обемния интеграл от цялото пространство. Под интегралната функция е от векторното произведение на плътността на тока на електричната индукция в текущата точка и разстоянието от текущата точка до дадената точка от пространството.

4. ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

- [1] IEC 60050, International Electrotechnical Vocabulary (IEV): Area: 121: Electromagnetism, Section 121-11: Electromagnetic concepts and quantities. <http://www.electropedia.org/>
- [2] <http://www.integral-calculator.com/>
- [3] <http://www.derivative-calculator.net/>
- [4] Scilab 5.4.1 (64 –bit) - open source platform for numerical computation
- [5] <http://web2.0calc.com/>
- [6] <http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=89c969c21b169fa996f899d9b2a9858>
- [7] Бозев Ив., Борисов Р., Експериментално изследване на електромагнитната индукция при променливо напрежение в области с нулева магнитна индукция. XXIII TELECOM' 2015, 15-16 October, NSTC, Sofia, Bulgaria.