

APPLICATION OF NEW MATHEMATICAL FUNCTIONS FOR DIGITAL LINEAR-PHASE FILTERS DESIGN

ПРИЛОЖЕНИЕ НА НОВИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ФУНКЦИИ ПРИ СИНТЕЗ НА ЛИНЕЙНО-ФАЗОВИ ЦИФРОВИ ФИЛТРИ

Peter Stoyanov Apostolov, Alexey Kostadinov Stefanov

Department of Communication and Computer Engineering, South-West University, „Neofit Rilski“, Ivan Michailov str. 66, Blagoevgrad, Bulgaria 2700, e-mail: p_apostolov@abv.bg ;
astef@abv.bg.

Петър Стоянов Апостолов, Алексей Костадинов Стефанов

Комуникационна и компютърна техника и технологии, ЮЗУ „Св. Неофит Рилски“, Благоевград, ул. Иван Михайлов, 66, България, 2700, e-mail: p_apostolov@abv.bg ;
astef@abv.bg

Keywords: Approximation, Error function, digital filter

Abstract – In the article we defined a new function that approximates with high precision ideal transfer function of the low-pass filter. The analytical relationships to determine the parameters of function, and their relationship with the parameters of the low-pass filter are presented. A method for linear-phase digital filters design is proposed. It has been shown experimentally that the proposed function possesses better qualities than equiripple polynomial approximation using L_∞ norm. An analysis of the results is made.

Резюме – В статията е дефинирана нова функция, която приближава с висока точност идеална предавателна функция на нискочестотен филтър. Изведени са аналитични зависимости за определяне на параметрите на функцията, както и връзката им с параметрите на нискочестотен филтър. Предложен е метод за синтез на линейно-фазови цифрови филтри. Експериментално е доказано, че предложената функция има по-добри апроксимационни качества от равновълнова полиномна апроксимация в Чебишевска метрика. Извършен е анализ на получените резултати.

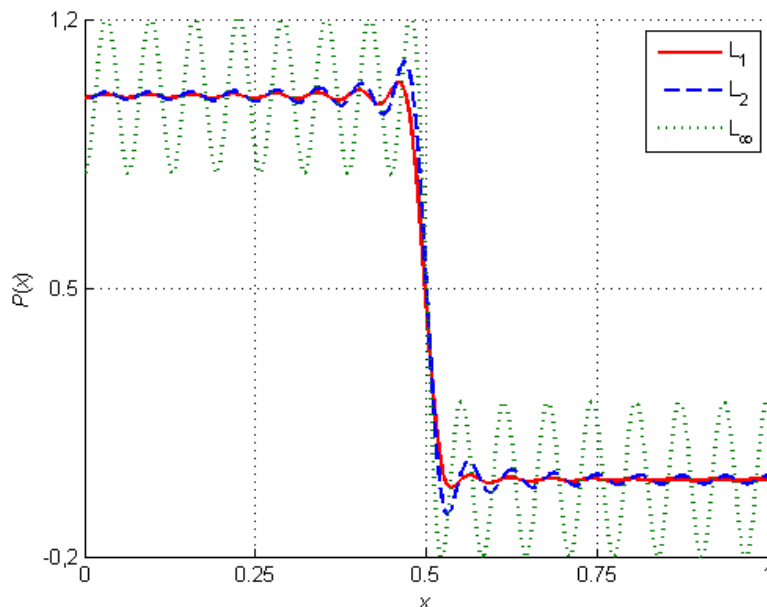
1. УВОД

Синтезът на филтри се основава на апроксимация на идеална предавателна функция на нискочестотен филтър.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5] \\ 0, & x \in (0.5, 1] \end{cases} \quad (1)$$

Важно условие при предаване на информация в цифров вид е използването на линейно-фазови (FIR) цифрови филтри. Последните се получават с полиноми апроксимации. Оценката на апроксимационната грешка дефинира

нормата, или метриката L_p , в която се извършва апроксимацията. Индексът p се променя от 1 до безкрайност и определя минималната пространствена област на приближение между идеалната и апроксимиращата функция. Най-често използваните метрики [1-3] са L_1 , L_2 и L_∞ . На Фиг. 1 са показани апроксимации на идеалната функция с полиноми в споменатите метрики.



Фиг.1. Апроксимации с полиноми от 32 степен в L_1 , L_2 и L_∞ метрика

От фигурата се вижда, че при апроксимациите L_1 и L_2 нарастването на стръмността на функцията в преходната област е свързано с нарастване на амплитудата на осцилациите, което се дължи на ефекта на Гибс. Основен недостатък е, че не може да бъде дефинирана точно ширината на преходната лента и ефектът на Гибс не може да бъде премахнат с увеличаване на степента на полинома. Апроксимация L_∞ се нарича равновълнова (Чебишевска метрика). Тя е оптимална, защото функцията осцилира с еднаква амплитуда, която е равна на грешката на апроксимацията $\varepsilon > 0$. При оптималната апроксимация преходната лента може да бъде дефинирана точно. С нарастване на степента на полинома грешката на апроксимацията ε намалява, но нараства броят на елементите, с които се реализира филтъра. Установено е, че при еднаква спецификация (неравномерност в лентата на пропускане и лентата на задържане и еднаква широчина на преходната лента), равновълновата апроксимация се извършва с полином от най-ниска степен. В теорията на цифровите филтри тази апроксимация е известна като метод на Паркс и Макклилн. Важно предимство е, че синтезът се извършва с итеративен алгоритъм на Ремез, който има бърза сходимост и неголяма изчислителна сложност.

В настоящата статия се предлага апроксимация с по-добри свойства от равновълновата, както и нейното приложение при синтез на цифрови FIR филтри.

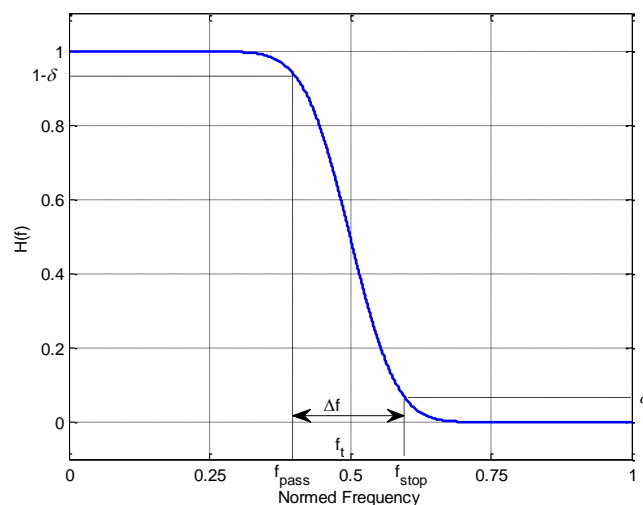
2. ТЕОРЕТИЧНИ ОСНОВАНИЯ

Идеята е да се използва функция с S-образна графика. Такива функции са сигмоида, аркус тангенс, тангенс хиперболичен, интегрална Гаусова функция на грешката $\text{erf}(\cdot)$ и др. От изброените функции най-голяма стръмност на графиката има интегралната Гаусова функция на грешката.

Следвайки тези основания, се въвежда функцията

$$H(f) = 0.5 - 0.5 \left[\text{erf} \left(\beta (2f - 2f_t) \right) \right], \quad (2)$$

където $f \in [0, 1]$ е нормирана честота. На фигура 1 е показана графиката на функцията. Тя има вида на максимално плоска амплитудно-честотна характеристика (АЧХ) на нискочестотен филтър.



Фиг. 1. Интегрална Гаусова функция на грешката - АЧХ на нискочестотен филтър

На фигурата са отбелязани: f_{pass} - гранична честота на лентата на пропускане; f_{stop} - гранична честота на лентата на задържане. Разликата на тези две честоти определя широчината на преходната лента

$$\Delta f = f_{stop} - f_{pass}. \quad (3)$$

Средната честота на преходната лента е отбелязана с f_t . Параметърът δ определя желаното затихване в лентата на задържане DS и затихването за лентата на пропускане DA . В сила са следните зависимости:

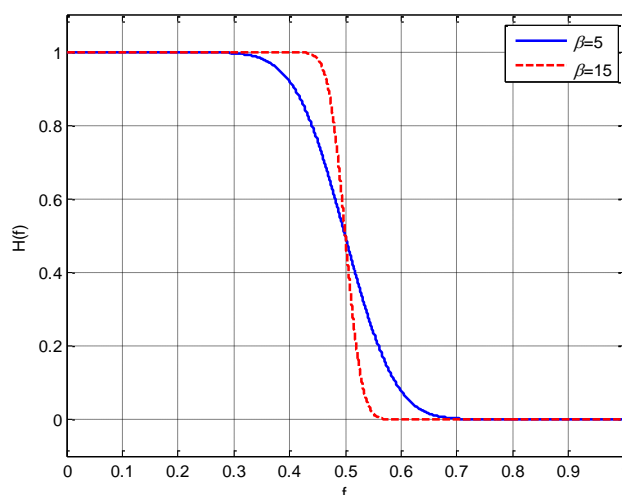
$$DS = 20 \lg(\delta); \quad \delta \in (0, 0.5); \quad (4)$$

$$DA = 20 \lg(1 - \delta); \quad (5)$$

$$\delta = 10^{DS/20}; \quad (6)$$

$$H(f_{pass}) = 1 - \delta; \quad H(f_{stop}) = \delta. \quad (7)$$

В уравнение (2) параметърът $\beta > 0$ променя наклона на графиката, което е равносилно на подобрение на селективността на филтъра – фигура 2.



Фиг. 2. Параметърът β подобрява селективността на характеристиката

Параметърът β се определя от широчината на преходната лента и параметъра δ

$$\beta = \frac{\text{erf}^{-1}(1-2\delta) - \text{erf}^{-1}(2\delta-1)}{2\Delta f}, \quad (8)$$

където $\text{erf}^{-1}(\cdot)$ е обратна интегрална Гаусова функция на грешката.

Проектирането на филтъра се извършва по метода на зададена АЧХ (Frequency sampling method). Както беше отбелязано, формула (2) е АЧХ на нискочестотен филтър. По нея се зачисляват 2^N стойности на функцията, след което с обратно преобразуване на Фурие се получава импулсната характеристика на филтъра. В случая 2^N определя дължината на филтъра. С този метод се получават филтри с линейна фазово-честотна характеристика (ФЧХ). Реализацията в практиката използва бързо преобразуване на Фурие.

3. ДИСКУСИЯ

Селективността на един филтър се определя от 4 параметъра:

- неравномерност на АЧХ в лентата на пропускане;
- стръмност на АЧХ в преходната;
- затихване на АЧХ в лентата на задържане;
- ред на филтъра – той е свързан със степента на апроксимация полином и показва броя на звената, от които се изгражда.

Един филтър има по-добра селективност от друг, когато при еднакви стойности на 3 от параметрите четвъртият е:

- по-малка неравномерност в лентата на пропускане;
- по-висока стръмност на АЧХ в преходната лента;
- по-голямо затихване в лентата на задържане;
- по-нисък ред на филтъра.

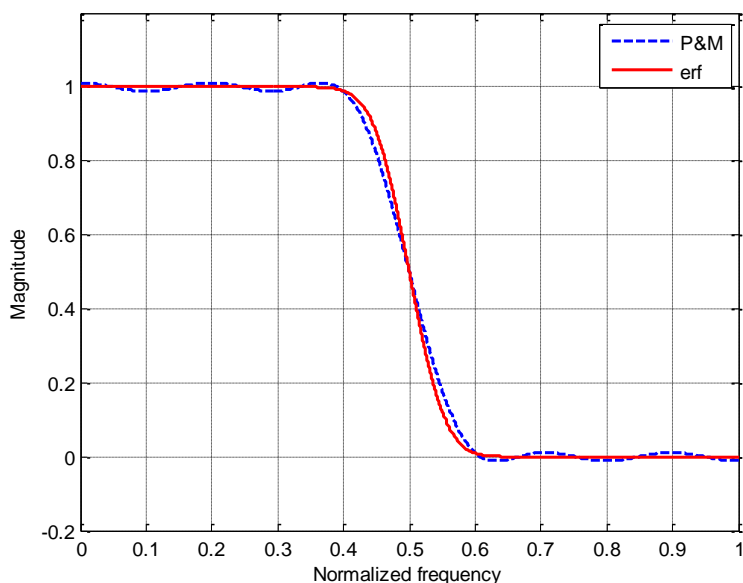
На тези основания, предложеният метод има следните предимства:

Амплитудно-честотната характеристика се получава директно от формула (2). Не се използват итеративни алгоритми и свързаните с тях проблеми със

сходимостта на алгоритъма. Това предполага ниска изчислителна сложност и високо бързодействие на синтеза.

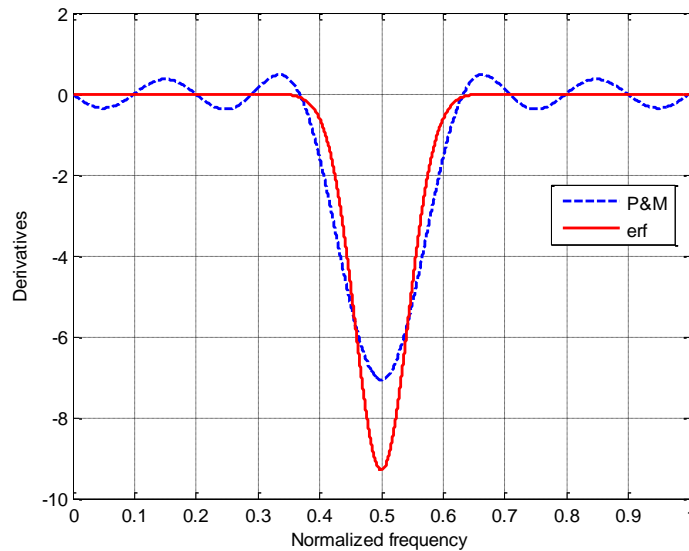
Филтрите са с максимално-полска АЧХ и линейна ФЧХ.

Най-често синтезът на FIR филтри използва апроксимации с тригонометрични полиноми с функции $\sin x/x$ и $\cos(x)$. Това са периодични функции и по тази причина получените АЧХ носят техния характер – локални екстремуми в лентите на пропускане и задържане (фигура 1). В разглеждания случай, АЧХ се получава от функция със забележителни свойства. Интегралната Гаусова функция на грешката е интеграл от Нормалното Гаусово разпределение, което е вид експоненциална функция. Експоненциалните функции най-точно отразяват естествения преход от единица към нула (обратната функция на експонентата се нарича натурален – естествен логаритъм). Тази функция не е периодична и няма екстремуми. Стръмността в преходната лента много бързо нараства при увеличение на параметъра β (фигура 2). От друга страна, в преходната лента функцията намалява монотонно. Това води до значително намаляване на ефекта на Гибс и позволява създаване на филтри с по-висока селективност от тези с равновълнова апроксимация. На фигура 3 е показано сравнение на АЧХ на филтри със следната спецификация: $f_t = 0.5$; $\Delta f = 0.2$; $\delta = 0.01$ ($DS = -40\text{dB}$).

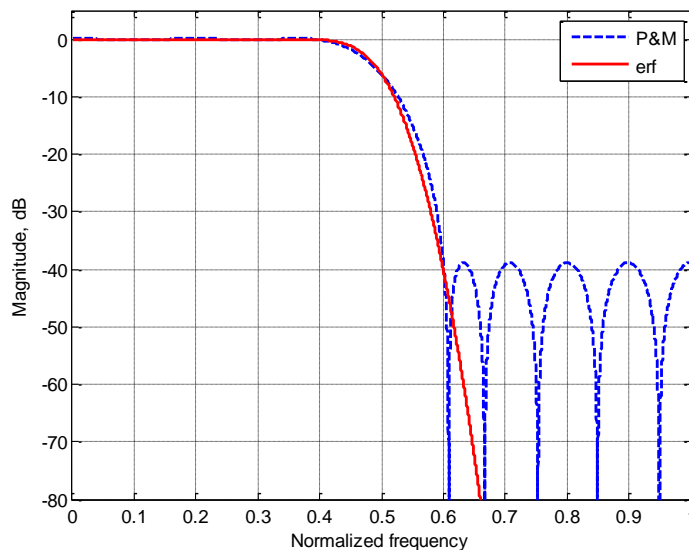


Фиг. 3. Сравнение на АЧХ

Очевидно е, че предложената функция приближава с по-голяма точност идеалната. В големи участъци в лентите на пропускане и задържане грешката на апроксимацията е практически нула. От друга страна, (2) има по-голяма стръмност в преходната лента. На фигура 4 са сравнени производните на двете функции. Производната на $\text{erf}(\cdot)$ за честотата $f_t = 0.5$ е по-голяма по абсолютна стойност, което определя по-висока стръмност и селективност.



Фиг. 4. Сравнение на производните
На фигура 5 са показани АЧХ в логаритмичен мащаб.



Фиг. 5. Сравнение на АЧХ в децибели

4. ИЗВОДИ

Предложена е функция с по-добри апроксимационни свойства от равновълнова апроксимация. Подходяща е за синтез на линейно-фазови цифрови филтри с висока селективност.

5. REFERENCES

- [1] Liron D. Grossmann and Yonina C. Eldar, "An L_1 -Method for the Design of Linear-Phase FIR Digital Filters," *Signal Process.*, vol. 55, no. 11, pp. 5253–5265, 2007.
- [2] E. Z. Psarakis, "A weighted L_2 -based method for the design of arbitrary one-dimensional FIR digital filters," *Signal Process.*, vol. 86, pp. 937–950, 2006.
- [3] J. H. McClellan and T. W. Parks, "A unified approach to the design of optimum FIR linear-phase digital filter," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-20, pp. 697–701, Nov. 1973.