

APPLICATION OF COMPRESSED COSINES APPROXIMATION FOR 2-D DIGITAL FILTERS SYNTHESIS WITH MINIMIZING APPROXIMATION ERROR MINIMIZATION

ПРИЛОЖЕНИЕ НА АПРОКСИМАЦИЯ С КОМПРЕСИРАНИ КОСИНУСИ ПРИ СИНТЕЗ НА ДВУМЕРНИ ЦИФРОВИ ФИЛТРИ С МИНИМИЗАЦИЯ НА АПРОКСИМАЦИОННАТА ГРЕШКА

Peter Stoyanov Apostolov, Alexei Kostadinov Stefanov

Department of Communication and Computer Engineering, South-West University, „Neofit Rilski“, Ivan Michailov str. 66, Blagoevgrad, Bulgaria 2700, e-mail: p_apostolov@abv.bg ; astef@abv.bg.

Петър Стоянов Апостолов, Алексей Костадинов Стефанов

Комуникационна и компютърна техника и технологии, ЮЗУ „Св. Неофит Рилски“, Благоевград, ул. Иван Михайлов, 66, България, 2700, e-mail: p_apostolov@abv.bg ; astef@abv.bg.

Keywords: Approximation, polynomial, 2-D digital filter

Abstract – In this paper, a new approximation method of compressed cosines is discussed. Analytical relations for minimization of the approximation error are derived. Method for high-speed synthesis of 2-D digital filters, as well as formulas for filters with different geometric contours are proposed.

Резюме – В доклада е разгледан нов апроксимационен метод на компресирани косинуси. Изведени са аналитични зависимости за минимизация на апроксимационната грешка. Предложен е метод за синтез на двумерни цифрови филтри с високо бързодействие, както и формули за филтри с различни геометрични контури.

1. УВОД

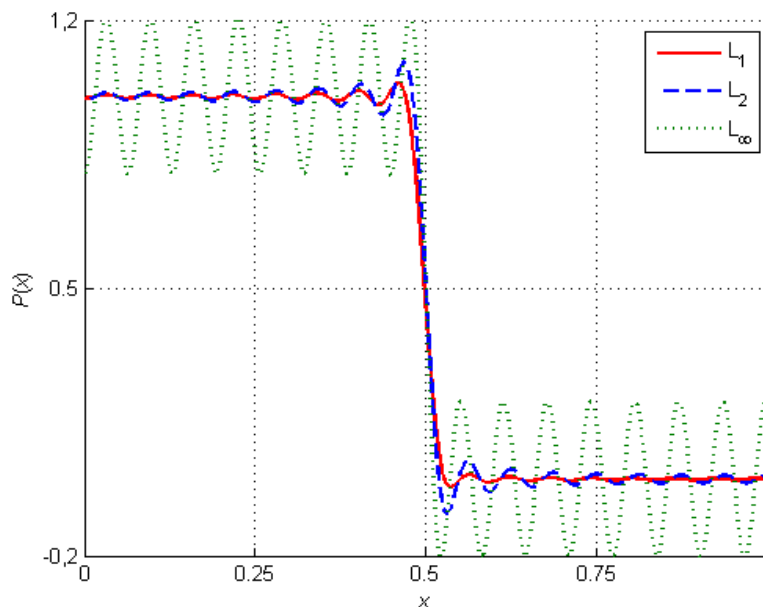
Синтезът на филтри се основава на апроксимация на идеална предавателна функция на нискочестотен филтър.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5] \\ 0, & x \in (0.5, 1] \end{cases}, \quad (1.1)$$

където x е нормирана честота.

Важно условие при предаване на информация в цифров вид е използването на линейно-фазови (FIR) цифрови филтри. Последните се получават с полиноми

апроксимации. Оценката на апроксимационната грешка дефинира нормата, или метриката L_p , в която се извършва апроксимацията. Индексът p се променя от 1 до безкрайност и определя минималната пространствена област на приближение между идеалната и апроксимиращата функция. Най-често използваните метрики са L_1 , L_2 и L_∞ . На Фиг. 1 са показани апроксимации на идеалната функция с полиноми в споменатите метрики.



Фиг.1. Апроксимации с полиноми от 32 степен в L_1 , L_2 и L_∞ метрика

От фигурата се вижда, че при апроксимациите L_1 и L_2 нарастването на стръмността на функцията в преходната област е свързана с нарастване на амплитудата на осцилациите, което се дължи на ефекта на Гибс. Основен недостатък е, че не може да бъде дефинирана точно ширината на преходната лента и ефектът на Гибс не може да бъде премахнат с увеличаване на степента на полинома. Апроксимация L_∞ се нарича равновълнова. Тя е оптимална, защото функцията осцилира с еднаква амплитуда, която е равна на грешката на апроксимацията $\varepsilon > 0$. При оптималната апроксимация преходната лента може да бъде дефинирана точно. С нарастване на степента на полинома грешката на апроксимацията ε намалява, но нараства броят на елементите, с които се реализира филтъра. Установено е, че при еднаква спецификация (неравномерност в лентата на пропускане и лентата на задържане и еднаква широчина на преходната лента), равновълновата апроксимация се извършва с полином от най-ниска степен. В теорията на цифровите филтри тази апроксимация е известна като метод на Паркс и Маклилън. Важно предимство е, че синтезът се извършва с итеративен алгоритъм на Ремез, който има бърза сходимост и неголяма изчислителна сложност.

2. АПРОКСИМАЦИЯ С КОМПРЕСИРАНИ КОСИНУСИ С МИНИМИЗАЦИЯ НА ГРЕШКАТА

От изложеното по-горе следва, че апроксимационната задача се свежда до намиране на полином, чиято графика да има минимален брой осцилации и висока стръмност в преходната област $1 - 0$.

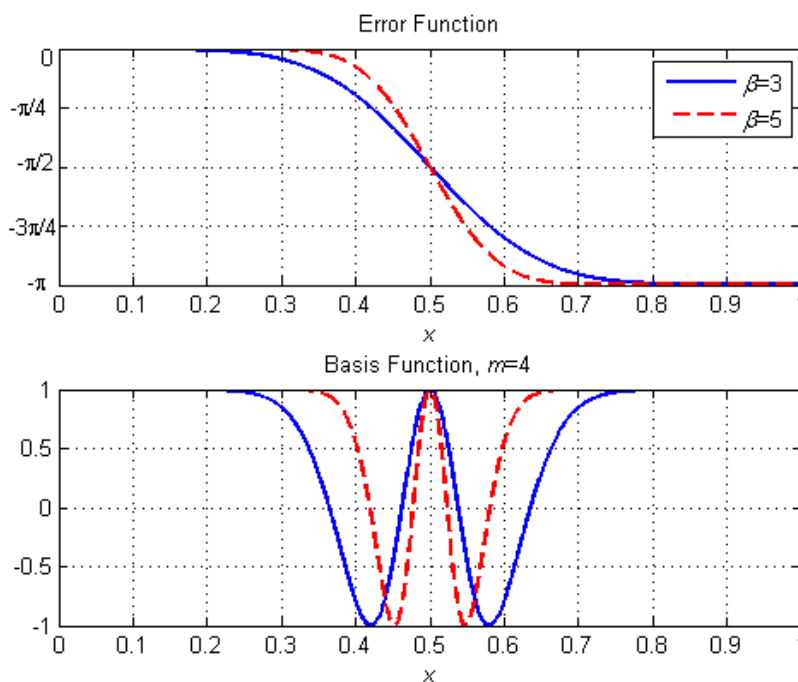
В [1] е предложен нов апроксимационен метод, който отговаря на изложените по-горе изисквания. Апроксимацията се извършва с тригонометричен полином от четвърти ред.

$$P_4(x) = \sum_{k=1}^5 b_k \cos[(k-1)\varphi(x)]. \quad (1.2)$$

Аргументът на косинуса съдържа модулираща функция с S-образна графика, която компресира осцилациите на косинуса в средата на дефиниционната област, т. е. в областта на прехода $1 - 0$.

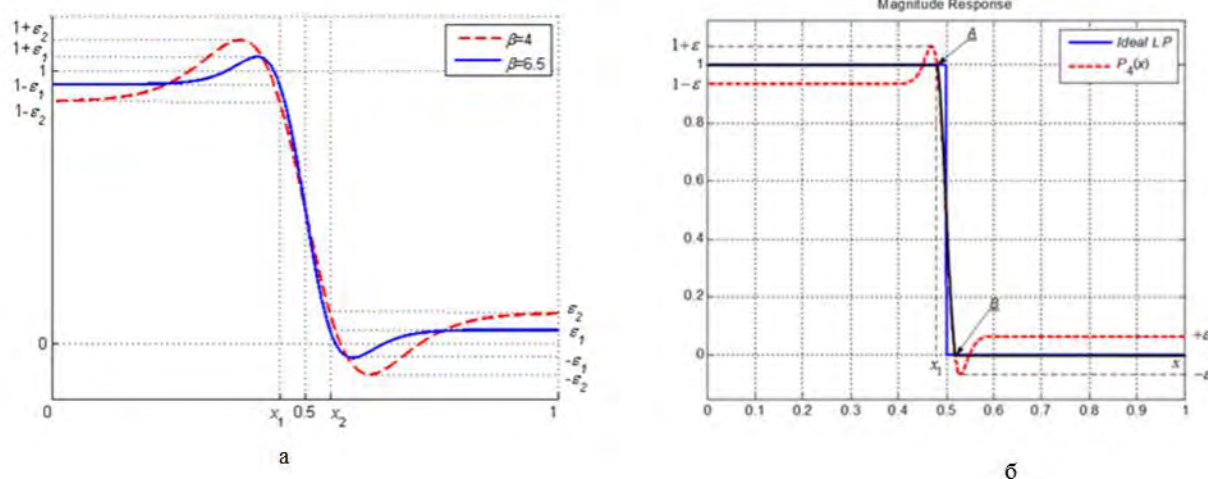
$$\varphi(x) = -\frac{\pi}{2} \left[\operatorname{erf}(\beta(2x-1)) + 1 \right], \quad (1.3)$$

където $\operatorname{erf}(\cdot)$ е интегрална гаусова функция на грешката. Параметърът β променя наклона на S кривата, а от там и гъстотата на осцилациите – Фиг. 2.



Фиг.2. Модулираща и базисна функция при две стойности на параметъра β

В резултат на това с полином от четвърти ред се поучава апроксимация, която има уникално свойство: чрез параметъра β може да се редуцира отскокът на функцията (грешката на апроксимацията ε), без да се променя широчината на преходната лента $\Delta x = x_2 - x_1$, както е показано на Фиг. 3(а).



Фиг.3. Апроксимации с компресирани косинуси при постоянна ширина на транзитната лента (а). Апроксимация с минимизация на грешката (б)

Апроксимацията е оптимална, с по един екстремум в лентата на пропускане и задържане. В сравнения с апроксимациите на фигура 1, апроксимацията с компресирани косинуси е най-близка до идеалната предавателна функция. При гранични условия: $\Delta x = 0$ и $\beta = \infty$, графиката на апроксимиращия полином от четвърти ред съвпада с идеалната предавателна функция на нискочестотен филтър (1).

На фиг. 3(б) с прекъснатата линия е показана апроксимация на идеална предавателна функция с полином от четвърти ред. Апроксимацията е равна на идеалната функция в 5 точки – две в лентата на пропускане, една в средата на дефиниционния интервал и две в лентата на задържане. В големи участъци на дефиниционния интервал тя е константа. В лентата на пропускане е равна на $1 - \varepsilon$, а в лентата на задържане на минус ε . При практическата реализация на филтри ε е много малко число. Например при затихване в лентата на задържане от 80 dB, $\varepsilon = 1e-4$. Следователно в интервала $[0, x_1]$ може да бъде приравнена на единица, в $[x_2, 1]$ на нула, а в преходната област (x_1, x_2) - равна на апроксимиращия полином. По този начин апроксимиращата функция се свежда до графиката с плътна черна линия на Фиг. 3(б). Очевидно тя е много по-близка до идеалната предавателна функция от апроксимиращия полином, тъй като в интервалите $[0, x_1]$ и $[x_2, 1]$ грешката $\varepsilon = 0$. В случая липсва ефект на Гибс, тъй като преходната област се апроксимира с оптимален полином. Честотата x_1 се определя от решенията на кубичното уравнение [2]

$$4b_4 \cos^3(\varphi(x_1)) + (b_2 - 3b_4) \cos(\varphi(x_1)) - 0.5 = 0. \quad (1.4)$$

Поради симетрията $x_2 \equiv B = 1 - x_1$.

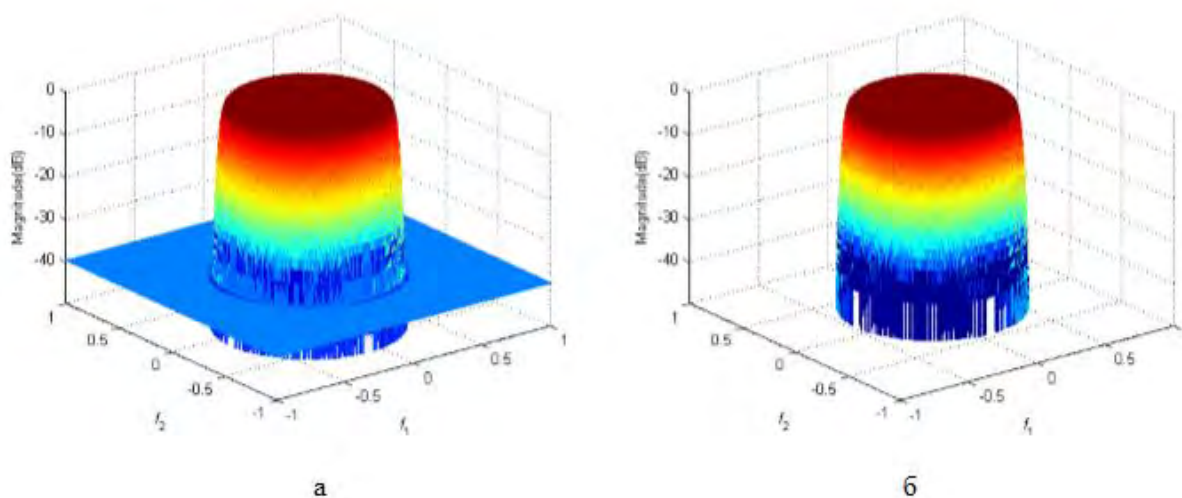
3. ДВУМЕРНИ ЦИФРОВИ ФИЛТРИ С КОМПРЕСИРАНИ КОСИНУСИ С МИНИМИЗАЦИЯ НА ГРЕШКАТА

Двумерните цифрови филтри намират широко приложение при обработка на изображения. Те се получават с апроксимации в двумерно пространство, които

изискват итеративни изчислителни операции за всяка точка на дефиниционното пространство. Изчисленията са сложни и продължителни. При предложената в предходната точка апроксимация това не е необходимо, тъй като много голяма част от стойностите на апроксимиращия полином са константи. По тази причина се извършва едномерна апроксимация, а филтърът се получава като ротационно тяло относно ординатната ос. На фигурите са показани двумерни нискочестотни цифрови филтри с размерност 512×512 , гранична честота 0.5, преходна лента 0.1 и затихване в лентата на задържане по-голямо от 40dB по мощност – $10\lg(\cdot)$. Предложени са различни видове контури r както следва:

- окръжност

$$r = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad f_{1,2} \in [-1, 1]; \quad (1.5)$$

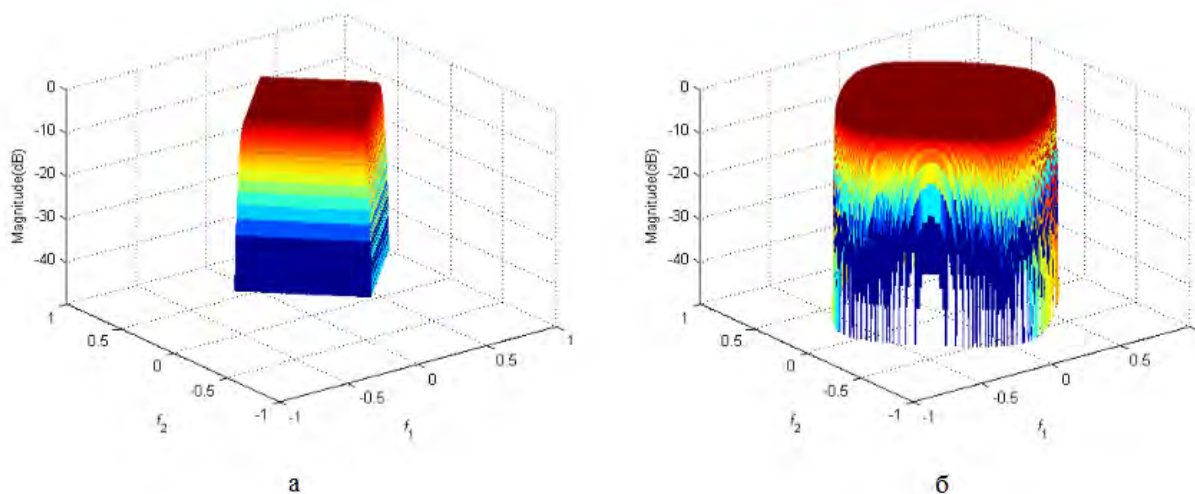


Фиг. 4. Двумерни филтри с форма на кръг без минимизация на грешката (а), с минимизация на грешката (б)

- квадрат

$$r = |f_1| + |f_2|, \quad f \in [-1, 1]; \quad (1.6)$$

$$r = \cos(\pi f_1) + \cos(\pi f_2) + 0.1, \quad f_{1,2} \in [-1, 1], \quad (б); \quad (1.7)$$



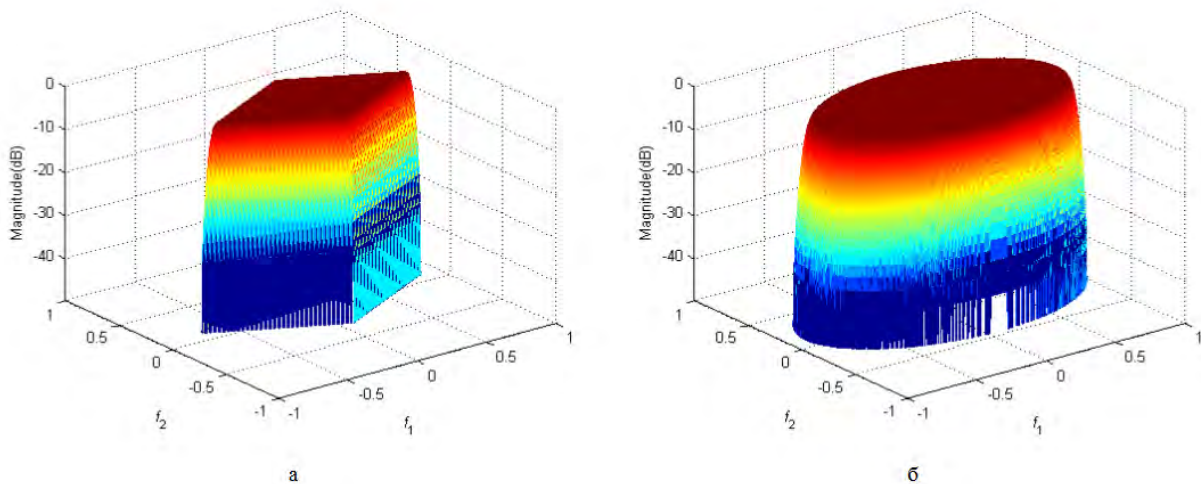
Фиг.5. Двумерни филтри с форма на квадрат

- ромб (а)

$$r = 0.7|f_1| + 2|f_2|, \quad f_{1,2} \in [-1,1]; \quad (1.8)$$

- елипса (б)

$$r = \sqrt{0.33f_1^2 + f_2^2}, \quad f_{1,2} \in [-1,1]; \quad (1.9)$$

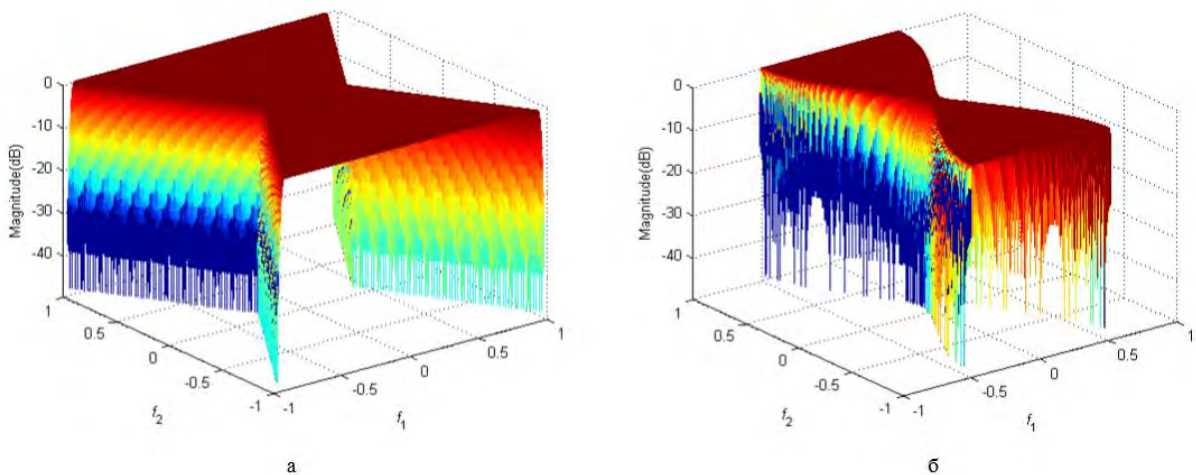


Фиг. 6. Двумерни филтри с форма на ромб (а), елипса (б)

- X – образна форма

$$r = 1.6|f_1| - |f_2|, \quad f_{1,2} \in [-1,1], \text{ (а)}; \quad (1.10)$$

$$r = 2 \cos(\pi f_1) - \cos(\pi f_2) - 0.46, \quad f_{1,2} \in [-1,1], \text{ (б)}; \quad (1.11)$$



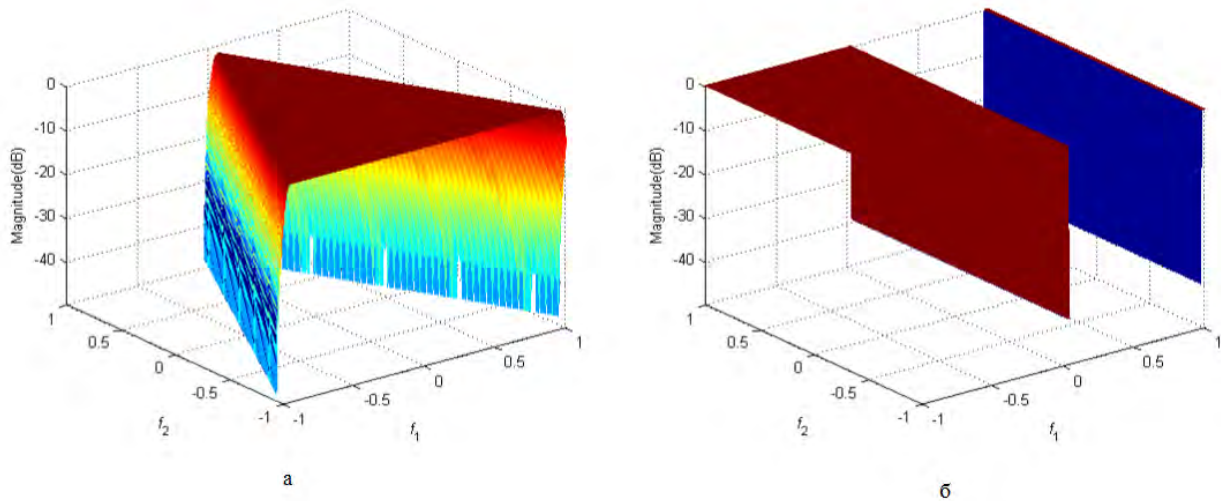
Фиг. 7. Двумерни филтри с X- образна форма

- триъгълник

$$r = 1.05|f_1| + 0.53|f_2|, \quad f_{1,2} \in [-1,1], \text{ (а)}; \quad (1.12)$$

- правоъгълник

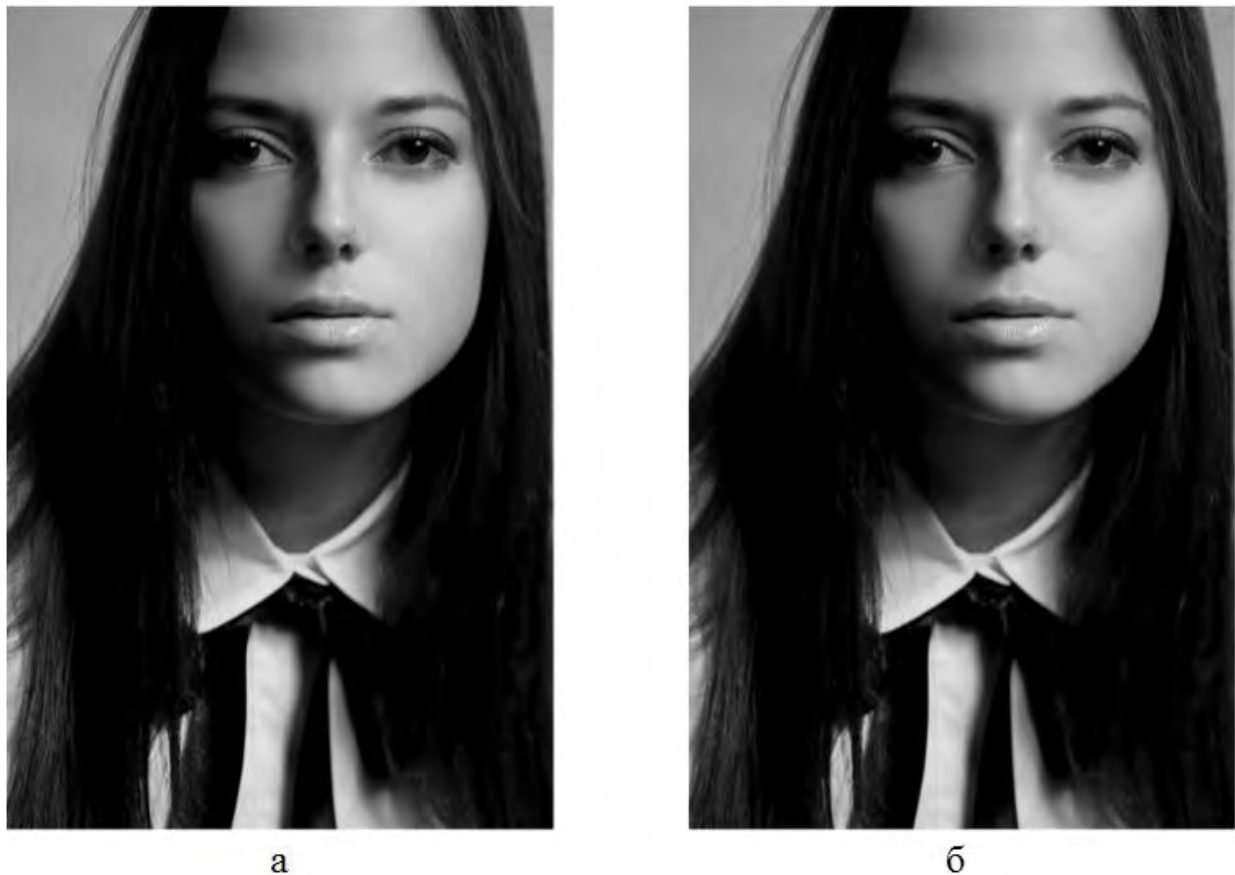
$$r = 1 \pm 5 \sin(\pi f_{1,2}), \quad f_{1,2} \in [-1,1], \text{ (б)}. \quad (1.13)$$



Фиг. 8. Двумерни филтри с форма на триъгълник (а), правоъгълник (б)

Предложеният начин на синтез има многократно по-високо бързодействие от съществуващите до момента. Филтър с размерност 512×512 се изчислява за по-малко от 2.8 секунди, докато при други методи [3] е от порядъка на минути.

На Фиг. 9 е показан ефектът от обработка на снимката Vlaga.jpg с нискочестотен филтър с елиптична форма - Фиг. 6(б). Филтрацията води до намаляване на контраста и „изглаждане“ на резките преходи на интензитета в изображението.



Фиг. 9. Vlaga (960x640): оригинал (а), през нискочестотен филтър с елиптична форма (б)

На Фиг. 10 е показана филтрация на същата снимка с високочестотен филтър с елиптична форма. Този вид обработка се използва за извличане на контури от изображението.



Фиг. 10. Vlaga (960x640): оригинал (а), през високочестотен филтър с елиптична форма (б)

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С метода на компресирани косинуси се получават апроксимации максимално близки до идеалната функция. Описаните аналитични зависимости минимизират апроксимационната грешка, което допълнително повишава точността на апроксимацията.

Предложен е метод за синтез на двумерни филтри с високо бързодействие, както и формули за получаване на филтри с различни геометрични контури.

5. REFERENCES

- [1] Апостолов, П. С. *Математически приближения с компресирани косинуси и техни приложения*. Академично издателство „Проф. М. Дринов“, 2012.
- [2] Апостолов, П. С. “New analytical relationships related to compressed cosines approximation method”, *XXI Telecom '2014*, 23-24 October, NSTC, Sofia, BULGARIA, pp. 56-63.
- [3] Boudjelaba, M. Kamal. *Contribution à la conception des filtres bidimensionnels non récursifs en utilisant les techniques de l'intelligence artificielle: application au traitement d'images*. Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences en électronique, Université Ferhat Abbas – Sétif – 1, Algérie, June, 2014.