STUDY OF FULL AVAILABILITY LOSS SYSTEM WITH GENERALIZED ARRIVAL AND DEPARTURE PROCESSES

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПЪЛНОДОСТЪПЕН СНОП СЪС ЗАГУБИ ПРИ ОБОБЩЕН ПРОЦЕС НА ПОСТЪПВАНЕ И НА ОСВОБОЖДАВАНЕ

Seferin Todorov Mirtchev

Communication Networks Department, Technical University of Sofia
8 Kliment Ohridski St., 1000 Sofia, Bulgaria, tel. (+ 359) 2 965 22 54,
e-mail: stm@tu-sofia.bg

Сеферин Тодоров Мирчев

Катедра „Комуникационни мрежи”, Технически университет – София
1000 София, бул. Климент Охридски, №:8, тел. 965 22 54
e-mail: stm@tu-sofia.bg

Keywords: loss system, Poisson and Bernoulli process, peaked distribution

Резюме – В този доклад се предлага обобщение на класическия пълнодостъпен сноп със загуби при обобщен поасонов процес на постъпване и обобщен бернулиев процес на освобождаване. Обобщеният пълнодостъпен сноп има нелинейна зависимост на интензивностите на постъпване и на освобождаване от състоянието на системата, което дава възможност да се задават различни потоци на постъпване и на освобождаване с два параметъра - математическо очаквани и дисперсия. За обобщената система са изведени формули, изчислени са и са показани в графичен вид вероятностите на състоянията и загубите по време. Изследваната телетрафична система се означава със символичните означения на Кендал по следния начин: Mg/Mg/n/0 и се описва с процес на раждане и умиране.

Предложеният подход дава възможност с един модел да се изследват телетрафични системи със загуби при изгладено, равномерно и неравномерно разпределение на състоянията на системата. Числените резултати и натрупания опит показват, че предложеният нов модел има интересни характеристики и е полезен за анализ на телетрафични системи.

Abstract – *In this paper, a summary of the classic full availability loss system with generalized Poisson arrival process and generalized Bernoulli departure process is proposed. The generalized full availability loss system has a nonlinear dependence of the arrival and departure intensities from the system states, which allow defining different arrival and departure flows with two parameters - mathematical expectation and variance. For the generalized system, formulas are defined and the state probabilities and the time congestion probabilities are calculated and shown graphically. Investigated teletraffic system is marked by Kendall notation as - Mg/Mg/n/0/S and is described by a birth and death process.*

The proposed approach allows with one model to investigate full availability loss systems with smooth, regular and peaked distribution of the system states. The numerical results and experience show that the proposed new model has interesting features and is useful for analysis of teletraffic systems.

1. УВОД

Едно от най-разпространените телетрафични разпределения, използвани при моделиране и проектиране на телекомуникационни мрежи е експоненциалното. Обикновено се приема, че постъпващият поток от повиквания е поасонов и че продължителността на обслужванията е експоненциално разпределена. На практика голяма част от съвременните трафикоизточници в мрежите генерират неравномерен трафик, който притежава дълговременни зависимости. В резултат моделите и методите, отчитащи неравномерността на трафичните потоци, стават актуални при изследването и планирането на широколентовите телекомуникационни мрежи [1].

Разработени са и са анализирани множество модели и методи за описание на случайните процеси в съвременните широколентови мрежи, тъй като не е възможно да се предложи един единствен модел описващ трафичните характеристики на всички мрежи. Разработването на добри и адекватни модели се явява основно изискване при планирането на такъв тип мрежи. В [2] е предложен модел на пълнодостъпен сноп със повторни опити, базиран главно на анализа на трафикоизточниците. За анализ на широколентовите мрежи с неравномерни трафични потоци може да се използва разпределението на Парето, което отразява дълговременните зависимости.

Методът на Bernoulli-Poisson-Pascal (BPP) се използва за апроксимиране на основните функции на загубите в телетрафични системи свързани с неравномерен или изгладен трафик [3]. Този метод представя изгладения и неравномерен трафик чрез два отделни модела, като има ограничения за произволен изгладен трафик. Трафичният модел на Марковски модулиран поасонов процес (Markov Modulated Poisson Process), който точно апроксимира Интернет трафика, е представен в [4].

За да се оцени влиянието на неравномерните входящи потоци при изследване на качеството на обслужване в широколентовите мрежи се предлага да се използва нелинейна зависимост на интензивността на постъпване и на интензивността на освобождаване от състоянието на системата. Целта на тази доклад е да се предложи обобщение на класическия пълнодостъпен сноп със загуби, на който постъпва обобщен поасонов входящ поток и процесът на освобождаване са описва с обобщен бернулиев процес.

2. ПЪЛНОДОСТЪПЕН СНОП СЪС ЗАГУБИ

Различни модели на пълнодостъпен сноп със загуби с идентични обслужващи устройства са изследвани и анализирани в продължение на десетилетия. Изчислението на вероятността от загуба и минимизирането на тази вероятност е трудна задача. Най-известният класически модел на система със загуби M/M/n/0 е изследван за първи път от Ерланг (1917). Той получава следната формула за вероятността за загуби

$$B = \frac{A^n / n!}{\sum_{i=0}^{n} A^i / i!}. \tag{1}$$

където $A = \lambda\tau$ е постъпващия трафик,

n е броят на каналите на пълнодостъпния сноп.

$1/\lambda$ и τ са съответно средната продължителност на интервалите между моментите на постъпване на повикванията и средната продължителност на заеманията, като и двете са експоненциално разпределени. Тази формула е известна като първа или B формула на Ерланг.

Палм (1943) е изследвал системата Gi/M/n/0 при независими интервали между моментите на постъпване с произволно разпределение. Анализирал е потока от необслужени повиквания и е изчислил вероятността за загуби в системата по следния начин

$$\frac{1}{P_n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i , \tag{2}$$

където, c_i са константи, изчислени по следния начин

$$c_0 = 1; \quad c_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-\varphi(i\mu)}{\varphi(i\mu)} \quad 1 \le i \le n , \tag{3}$$

където, φ е трансформация на Лаплас-Стилтес на интервалите между моментите на постъпване.

Нагледно доказателство на формула 3 е направено от Такакс (1957 г.) с помощта на уравнения на крайните разлики.

Пълнодостъпният сноп със загуби GI/M/m/0 е система със специално внимание. Той е известен като добър модел за телефонните системи и е обект на изследване в продължение на много десетилетия. Напоследък се отделя внимание на нестационарни пълнодостъпни системи със загуби и на такива системи при различни абонатни класове [5,6]. Интензивно се изследват пълнодостъпни системи със загуби при повторни обслужвания и откази във връзка с анализа на кол центрове и на клетъчни мрежи.

В [7] е изследван пълнодостъпният сноп със загуби GI/M/m/0 при хетерогенно обслужване. Първата формула на Ерланг при зависеща от състоянието интензивност на постъпване е обобщена в [8]. В [9] е предложено обобщение на първата формула на Ерланг чрез разпределението на Пойа.

В [10] е изследвана мрежа от телетрафични системи със загуби, като се анализират отделните системи чрез пълнодостъпен сноп GI/G/c/0. За да се получат вероятностите на състоянията на тази система, се използват апроксимации.

Въпреки големия брой изследвания в литературата на системата със загуби GI/G/c/0 прост израз за вероятностите на състоянията не е получен.

3. ОПИСАНИЕ НА ТЕЛЕТРАФИЧНАТА СИСТЕМА

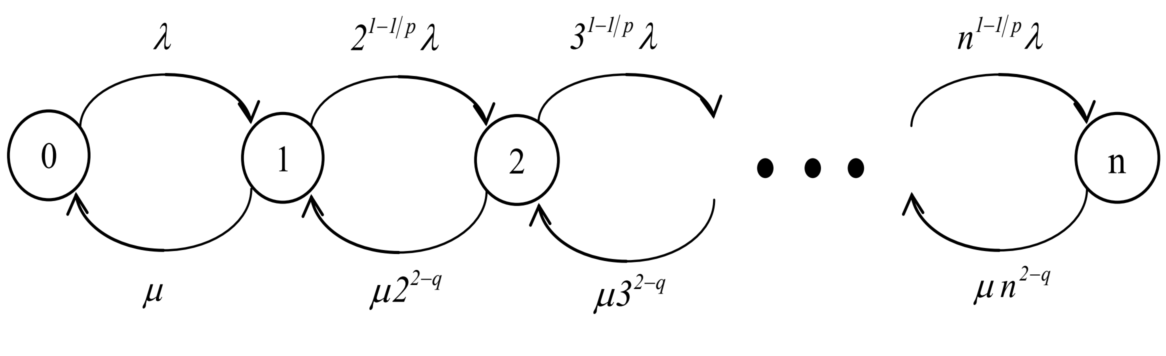
Съгласно означенията на Кендал изследваната телетрафична система се записва символично по следния начин Mg/Mg/n/0/S. Тя представлява пълнодостъпен сноп със загуби при обобщен поасонов входящ поток, обобщен поток на освобождаване и n обслужващи устройства.

Пълнодостъпният сноп при обобщен процес на постъпване и на освобождаване, които могат да бъдат изгладени, равномерни или неравномерни, представлява процес на раждане и умиране с нелинейна зависимост на интензивността на постъпване и обслужване на заявките от състоянието на системата. Диаграмата на преходите и състоянията на процеса на раждане и умиране и показана на фиг.1. За изчисление на вероятностите на състоянията на обобщения пълнодостъпен сноп може да се използва общото решение на процеса на раждане и умиране.

Нека да разгледаме един пълнодостъпен сноп с n на брой обслужващи устройства и обобщен процес на постъпване и на освобождаване. Избираме λ да е интензивността на постъпване на повикванията, когато системата е свободна, p да е параметър, характеризиращ нелинейната зависимост на обобщения поасонов входящ поток от състоянията на системата, μ да е интензивността на освобождаване, когато е зает само един канал, и q да е параметър, характеризиращ нелинейната зависимост на обобщения поток на освобождаване от състоянията на системата. Изследваният пълнодостъпен сноп с явни загуби при обобщен поасонов поток се описва чрез следните интензивности на постъпване и освобождаване

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \lambda\,(k+1)^{1-1/p} && k = 0,1,2,\dots,n \\ &\lambda_k = 0 && k > n \\ &\mu_k = k\,\mu\,k^{1-q} && k = 1,2,3,\dots,n \end{aligned} \quad . \tag{4}$$

Интензивността на постъпване зависи от състоянията на системата и двете интензивности на раждане и умиране зависят от параметрите индекс на неравномерност p и q. Тази телетрафична система винаги има стационарен режим. Нейната диаграма на състоянията и преходите е показана на фигура 2.2.



Фиг.1. Диаграма на състоянията и преходите на системата M(g)/M(g)/n/0/S

4. ОБОБЩЕНО ПЪРВО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ЕРЛАНГ

Прилагайки показаните коефициенти за общото решение на процеса на раждане и умиране и използвайки трафичната интензивност $a = \lambda/\mu$, когато всички канали са свободни, получаваме обобщено първо разпределение на Ерланг

$$P_k = \frac{a^k / (k!)^{1/p-q+1}}{\sum_{i=0}^{n} \left(a^i / (i!)^{1/p-q+1} \right)} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n \quad . \tag{5}$$

Вероятностите на състоянията се описват с обобщено първо разпределение на Ерланг, което представлява обобщено пресечено разпределение на Поасон. Когато параметрите индекси на неравномерност са равни на единица $p = q = 1$, получаваме дискретното първо разпределение на Ерланг.

След като се изчислят вероятностите на състоянията могат да се изчислят математическото очаквани и дисперсията на броя заети канали, чрез формулите за тяхната дефиниция. Коефициентът на неравномерност на заетите канали на пълнодостъпния сноп, които е равен на отношението на дисперсията към математическото очаквани, се изчислява и се използва за характеризиране на влиянието на обобщените процеси на постъпване и на освобождаване.

Постъпващият трафик се изчислява с помощта на средната интензивност на постъпване $\overline{\lambda}$ и средното време за обслужване $\overline{\mu}$

$$A = \overline{\lambda} / \overline{\mu} \tag{6}$$

$$\overline{\lambda} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{1-1/p} P_k \tag{7}$$

$$\overline{\mu} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{k} \frac{P_k}{\sum_{i=1}^{n} P_i} = \mu \sum_{k=1}^{n} k^{1-q} \frac{P_k}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \ . \tag{8}$$

Обслуженият трафик е равен на средния брой едновременни повиквания в системата

$$A_c = \sum_{k=0}^{n} k P_k \ . \tag{9}$$

Вероятността за загуби по време е равна на вероятността да са заети всички канали на пълнодостъпния сноп

$$B_t(a,p,q,n) = P_n \ . \tag{10}$$

Приемаме, че трафичният поток се създава от краен брой източници S. На практика обикновено $S >> n$. Допускаме, че за всеки източник има обслужващо устройство. Тогава обслужващата система е идеална (без загуби и чакане), а постъпващият трафик е равен на обслужения и се нарича потенциален A_i. За идеалната обслужваща система вероятностите на състоянията се определят аналогично на формула (5)

$$P_k' = \frac{a^k / (k!)^{1/p-q+1}}{\sum_{i=0}^{S} \left(a^i / (i!)^{1/p-q+1} \right)} \qquad 0 \le k \le S \ . \tag{11}$$

Потенциалният трафик е равен на математическото очакване на броя заети канали на идеалния пълнодостъпен сноп

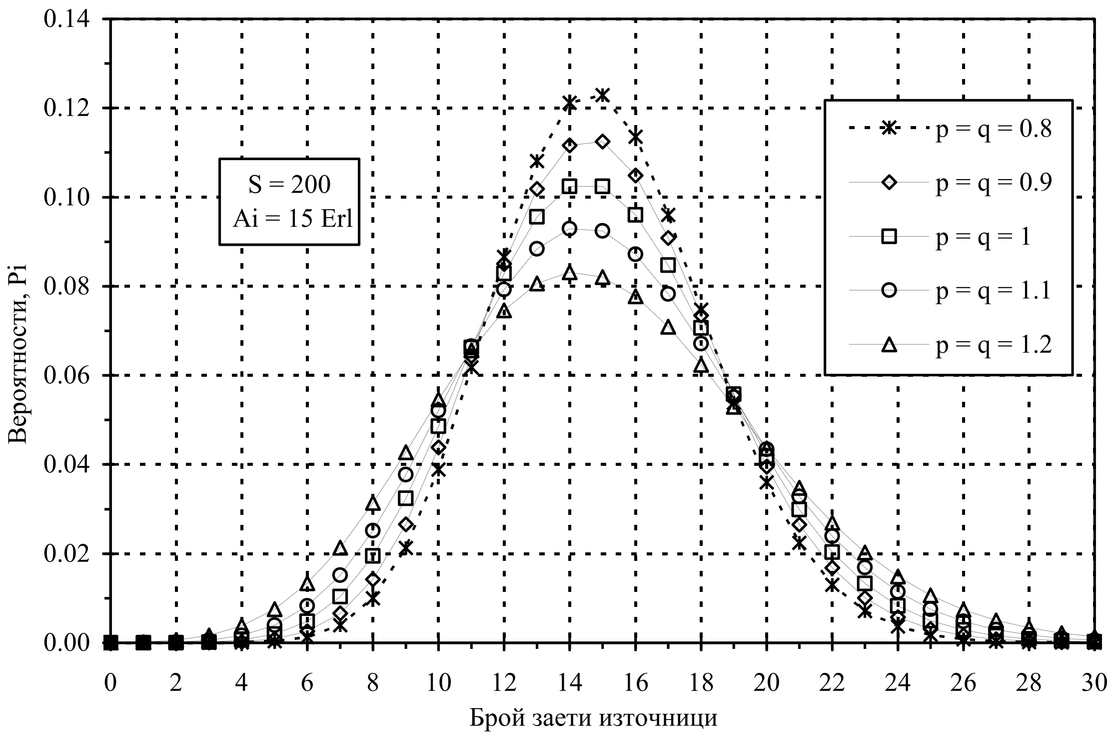
$$A_i = \sum_{j=1}^{S} j P_j' , \quad Erl \ . \tag{12}$$

За изчисление на вероятностите на състоянията (5) е необходимо да зададем трафика *a* и параметъра *p,* след което може да се определи постъпващия трафик с формула (6). От практическа гледна точка в повечето случаи е необходимо да зададем постъпващия трафик и след това да анализираме системата. За изследвания пълнодостъпен сноп е възможно да зададем стойности на потенциалния трафик A_i и след това да изчислим трафика *a* чрез итерационния метод на последователните приближения. За да изчислим потенциалния трафик, е необходимо да зададем краен брой на източниците *S*.

5. ЧИСЛЕНИ РЕЗУЛТАТИ

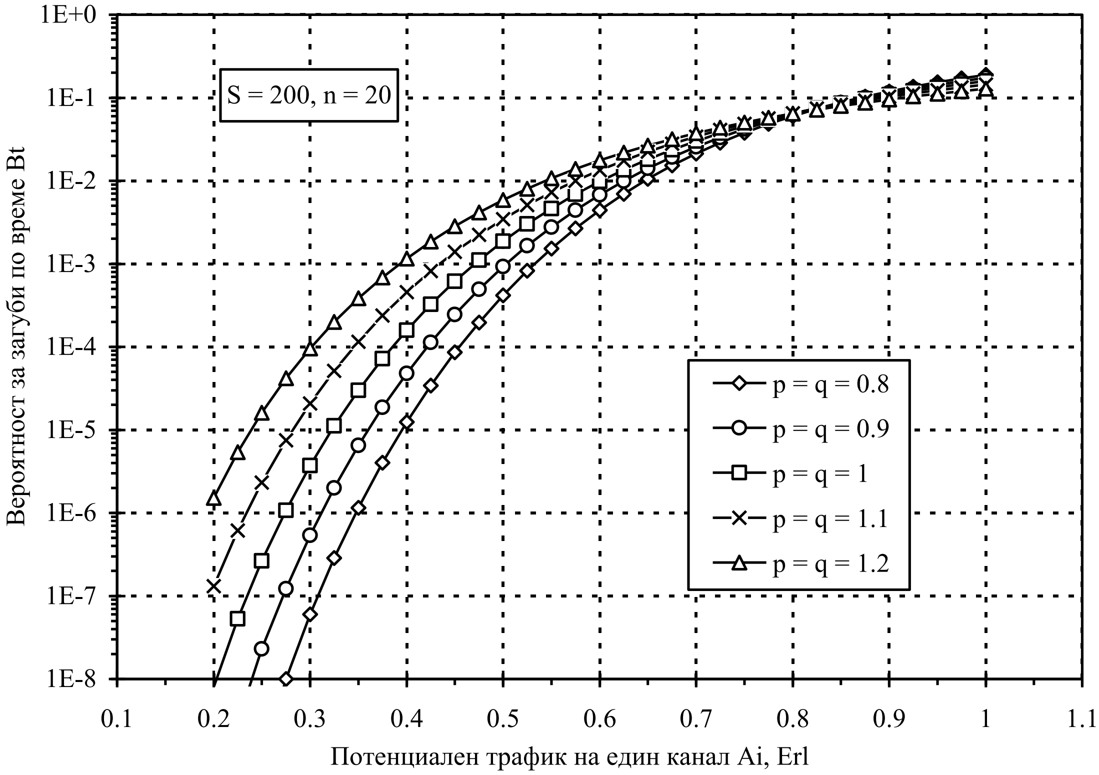
За да се получат числени резултати и да се представят в графичен вид е написана машинна програма на Паскал за персонален компютър. Предложеният метод на изследване е тестван с голям брой стойности на параметрите.

На фиг.2 са показани вероятностите на състоянията на обобщения пълнодостъпен сноп при брой на източниците 200, потенциален трафик 15 Erl и различни стойности на индексите на неравномерност на процесите на постъпване и на освобождаване *p* и *q*. Вижда се, че по-големите стойности на индексите на неравномерност (по-голяма дисперсия) водят до по-големи стойности на вероятностите отдалечени от математическото очакване, което е равно на 15.



Фиг.2. Вероятности на състоянията на системата Mg/Mg/S/0/S.

На фиг.3 е показана зависимостта на вероятността за загуби по време от потенциалния трафик на един канал на обобщен пълнодостъпен сноп при брой на източниците 200, брой на каналите на снопа 20 и различни стойности на индексите на неравномерност на процесите на постъпване и на освобождаване p и q. От фигурата се вижда, че при потенциален трафик 10 Erl (трафик на един канал 0.5 Erl) вероятността за загуби по време нараства с повече от един порядък при промяна на индексите на неравномерност на процесите на постъпване и на освобождаване от 0.8 до 1.2.



Фиг.3. Промяна на вероятността за загуби по време при различни стойности на индексите на неравномерност на процесите на постъпване и на освобождаване.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В този доклад е предложен метод за анализ на пълнодостъпен сноп със загуби при обобщен поасонов входящ поток и обобщен бернулиев процес на освобождаване. Предложеният метод дава възможност с един модел да се моделира неравномерен, равномерен и изгладен входящ поток. Направено е обобщение на първата формула на Ерланг. Представените числени резултати и последващият опит показват, че този метод е точен и полезен при анализ на телетрафични системи .

Има различия между представените резултати и изчислените вероятности за загуби чрез метода на еквивалентните замени - ERT и чрез метода Бернули-Поасон-Паскал - BPP. Методът ERT използва еквивалентен трафик като генератор на неравномерен трафик в обходния сноп, който е част от разпределението на Поасон. Моделът BPP използва линейна зависимост на интензивността на постъпване от състоянията на системата.

Важно предимство на представените резултати на пълнодостъпния сноп със загуби при обобщен поасонов входящ поток идва от възможността да се описват поведения в по-сложни реални системи за масово обслужване. В този случай само с един обобщен модел се описват реалните телетрафични системи, което е полезно при проектиране на телекомуникационни мрежи и системи.

Литература

[1]. Stasiak, Maciej et al., *Modelling and dimensioning of mobile networks; from GSM to LTE,* John Wiley & Sons, 2011.

[2]. Abramov V. Analysis of multiserver retrial queueing system: A martingale approach and an algorithm of solution. Ann Oper Res 141, 2006, pp. 19–50.

[3]. Girard A. *Routing and Dimensioning in Circuit-Switched Networks*, Addison-Wesley, 1990.

[4]. Muscariello L., M. Mellia, M. Meo, M. Ajmone Marsan, R. Lo Cigno, An MMPP-Based Hierarchical Model of Internet Traffic, IEEE International Conference on Communications, Vol. 4, 2004, pp. 2143-2147.

[5]. Isguder H. O., Celikoglu C. C. Minimizing the loss probability in GI/M/3/0 queueing system with ordered entry. Scientific Research and Essays Vol. 7(8), 2012, pp. 963-968, Available online at http://www.academicjournals.org/sre/pdf/pdf2012/29Feb/Isguder and Celikoglu.pdf

[6]. Zeifman A. On the Nonstationary Erlang Loss Model. Automation and Remote Control, Vol. 70, No. 12, 2009, pp. 2003–2012.

[7]. Isguder H., U. Kocer and C. Celikoglu. Generalization of the Takacs' Formula for GI/M/n/0 Queuing System with Heterogeneous Servers. Proceedings of the World Congress on Engineering (WCE) Vol. I, U.K., 2011, pp. 45-47.

[8]. Iversen V. and S. Mirtchev. Generalised Erlang Loss Formula. Electronics Letters, Vol. 32, No: 8, April 1996, pp. 712-713.

[9]. Mirtchev S., R. Goleva, G. Balabanov, V. Alexiev. Multiserver loss queueing system Polya/G/n/0 with peaked input flow. Int. J. Reasoning-based Intelligent Systems, Vol. 5, No: 3, 2013. pp. 169-176.

[10]. Asaduzzaman M. and T. Chaussalet. Capacity planning of a perinatal network with generalised loss network model with overflow. European Journal of Operational Research 232(1), 2014, pp. 178-185.